

基于等式约束最小二乘的 B 样条曲线拟合*

王 栋¹, 高成英², 梁 云¹, 高月芳¹, 朱同林¹

(1. 华南农业大学信息学院, 广东 广州 510642;

2. 中山大学计算机应用研究所, 广东 广州 510275)

摘 要: 给出一种 B 样条曲线拟合有序数据的方法。以曲率为代价对有序数据简化。将简化后的数据插值曲线作为硬约束条件, 以原始数据逼近曲线作为软约束条件, 建立等式约束的最小二乘方程。利用 QR 分解技术求解方程确定 B 样条曲线的控制点。采用平方距离最小化方法计算原始数据到生成的 B 样条曲线的距离, 如果不满足误差要求将误差最大数据加入硬约束条件, 对局部受影响的部分重新生成曲线。该方法在满足拟合精度的前提下, 具有较快的收敛速度, 生成的 B 样条曲线具有较少的控制点。该方法也可用于解决带约束的曲线拟合问题。

关键词: 曲线拟合; 简化; 等式约束最小二乘

中图分类号: TP391 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2008) 04-0015-04

曲线拟合在计算机视觉, CAD/CAM, 逆向工程等方面有着广泛的应用。一般生成的曲线从三个方面考虑: 拟合精度、控制点个数和拟合速度。要求在保持容忍误差控制的前提下, 曲线具有较少的控制点和较快的拟合速度。由于事先无法确定控制点的个数和位置, 该问题通常采用优化的方法循环调整^[1]。Yang 等^[2]通过插入或删除控制点进行动态调整, 但其在处理时比较费时, 而且算法对初始控制点的位置和个数没做处理。Park^[3]给出了误差控制的平面 B 样条曲线表示, 其先用多边形逼近给定的曲线, 然后用 B 样条曲线拟合多边形。随后 Park 等^[1]又提出一种基于优势点的自适应的 B 样条曲线拟合方法。Guillaume 等^[4]提出了一种用细分技术分段逼近光滑多边形曲线, 但该方法只适用于非噪声数据。另外任绍忠等^[5]和郭凤华^[6]对曲线拟合中型值点参数的最优化问题进行了讨论。本文在 Park 和 Guillaume 工作的基础上提出一种新的曲线拟合方法。首先以曲率为代价对有序数据进行简化。然后以简化后的数据作为曲线段的端点建立三次 B 样条曲线方程, 并采用等式约束下的最小二乘法确定控制点的位置。最后采用平方距离最小化方法进行误差估计, 对不满足误差要求的部分加入新的简化数据重新生成曲线。

1 算法思路

B 样条曲线拟合一个重要方面是在保持理想精

度的前提下采用较少的控制点。由于事先不知道控制点的个数、位置以及数据点的参数值, 该问题通常采用循环优化技术进行调整。其中初始控制点的数目和位置显得尤为重要, 初始曲线逼近越好, 收敛速度越快^[2]。在给定的数据中, 一些数据点对曲线的形状起重要作用, 以这些点作为初始拟合点是理想的选择。因此, 本文的算法思路为:

(1) 以曲率为代价对原始数据 V 进行简化, 得到简化数据点 V_s 。

(2) 以简化点 V_s 为插值点, 以其余原始数据点作为逼近点 V_r , 建立基于方程约束的最小平方方法, 求解控制点。

(3) 计算所有点 V 到 B 样条曲线的距离, 若小于给定的域值, 结束。否则, 将误差最大点加入简化数据 V_s , 转 2。

2 数据简化

如同网格简化, 多边形简化的目的是在减少模型的边数和顶点数的情况下, 尽量保持原始模型的形状^[7]。为了方便误差估计, 简化多边形的顶点应是原多边形顶点的子集。即没有新的顶点创建, 而相对不重要的顶点从多边形中移走。在多边形简化之前, 我们首先评价多边形每个顶点的代价, 每次简化时删除最不重要的顶点。点的曲率在描述数据集所确定的形状时提供了重要信息。曲率较大的地

* 收稿日期: 2007-12-14

基金项目: 广东省自然科学基金资助项目 (07006689)

作者简介: 王栋 (1977 年生), 女, 讲师; E-mail: wdnng@163.com

方曲线较复杂,而曲率较小的地方相对平坦。当给定的点带有噪声,不太容易精确可靠地评估他们的曲率,这将影响一些特征点的检测。所以本文采用两次去噪,先对原始数据点的几何坐标进行去噪,然后再对点的曲率进行去噪。

对于原始数据的每个点 $v_i (i = 0, 1, \dots, m-1)$, 曲率定义为相邻三个点 $v_{i-1}v_iv_{i+1}$ 所构成三角形的外接圆半径的倒数。即

$$C(v_i) = \frac{2\sin(\varphi_i)}{d_i}$$

其中 φ_i 是向量 $\overrightarrow{v_{i-1}v_i}$ 和 $\overrightarrow{v_iv_{i+1}}$ 之间的夹角, d_i 是向量 $\overrightarrow{v_{i-1}v_{i+1}}$ 的长度 $|\overrightarrow{v_{i-1}v_{i+1}}|$ 。

由于简化时采用点的曲率的相对值,所以曲率去噪采用简单的 Laplacian 算法^[8],而为了防止图形收缩,点的几何坐标采用 Taubin 平滑算法^[9]。该算法将信号处理的知识引入 Laplacian 算法中,提出一种加权 Laplacian 算子的算法;通过增加一个负收缩因子将 Laplacian 平滑引起的收缩再放大回去,在一定程度上控制了调整后模型的变形。其表示为

$$T(v) = \frac{1}{2} \sum_{i=1,2} v_i - v$$

$v_i (i = 1, 2)$ 为和 v 相邻的两个顶点,而相应顶点的坐标通过下式完成,即

$$v' = (1 - \mu T)(1 + \lambda T)$$

$$v = v - (\mu - \lambda)T(v) - \mu\lambda T^2(v)$$

其中 λ 为一正数调节因子,取值在 0~1 之间,可以控制网格平滑的速度, μ 的值通过 $1/\mu + 1/\lambda = 1$ 来确定,且 $\mu > \lambda > 0$ 。

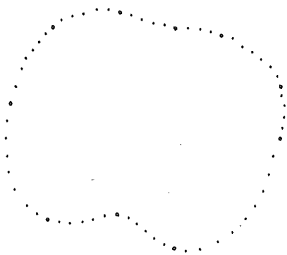


图1 数据简化

Fig. 1 Data simplification

简化过程分两步,首先通过 $(C(v_i) - C(v_{i-1}))(C(v_i) - C(v_{i+1})) < 0$ 将非极值曲率对应的点从简化数据中删除,然后再通过 $(C(v_i) - C(v_{i-1}) < 0) \&\& (C(v_i) - C(v_{i+1}) < 0)$ 将曲率极小值对应的点删除。简化方法可以实现自适应曲线拟合,即在平坦的区域产生较少的数据,而在复杂的区域产生较多的数据。如图1所示,小点为原始数

据,大点为采用本文算法得到的简化数据。

3 带约束的三次 B 样条曲线拟合

以简化数据为拟合点,建立三次 B 样条曲线方程。由于简化数据为曲率极大点,根据文献[4],曲率极大点位于曲线段的端点。设曲率极大点个数为 k ,对封闭曲线,则至少需要 k 段曲线,对于开曲线,至少需要 $k-1$ 段曲线,且它们所对应的控制点个数为 k 。所建立的曲线方程为

$$M_s P = V_s$$

P 为控制顶点, M_s 为细分矩阵,且有

$$M_s = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 4 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & 1 & 4 & 1 & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & 1 & 4 & 1 & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & 1 & 4 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

期望建立的方程生成的曲线不仅插值简化数据 V_s ,而且逼近原始数据 V 。这样的问题通常采用经典的 lagrange 乘子法解决,然而该方法产生一个非正定的线性系统,其计算费时。本方案考虑采用等式约束下的最小二乘法^[10],其插值约束可以看作硬约束: $M_s P = V_s$;逼近约束看作软约束: $M_B P = V$, M_B 由三次 B 样条基函数确定,对应的参数 t 采用累加弦长的方法计算。则问题可以写为如下形式:

$$\min_{M_s P = V_s} M_B P - V \quad (1)$$

对矩阵 M_s 做 QR 分解,有 $M_s^T = QR$, $M_s \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $R \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 。进一步, $Q = [Q_1, Q_2]$, $m \quad n-m$

$$R = \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix}_{n-m}^m, Q^T P = \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}_{n-m}^m, \text{ 方程 (1) 可}$$

重新表示为

$$\min_{S^T y = d} \|M_B Q_1 y + M_B Q_2 z - c\|_2 \quad (2)$$

$$\min_z \|M_B Q_2 z - (c - M_B Q_1 y)\|_2 \quad (3)$$

求解最小平方系统,得控制顶点的几何坐标为

$$P = Q \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} \quad (4)$$

4 曲线优化

曲线曲面拟合的效果如何,通常通过误差估计来衡量,关于误差估计的方法有:点距离、切向量距离和平方距离^[11]。从逼近效果看,点距离最小化和平方距离最小化有较好的拟合效果,而切向量最小化易陷入局部最小,产生的曲线出现自交现

象。从逼近速度看,从快到慢依次为平方距离、切向量和点距离。本文采用平方距离最小化方法做误差估计。

对于二维空间的一点 v_i , 点 O 是对应曲线 f 上的脚点。局部 Frenet 标架系以 O 为原点, 两个坐标轴 x 和 y 分别是曲线 f 在脚点 O 的切向量和法向量。则点 v_i 到曲线 f 的平方距离的局部二次逼近定义为

$$F_d(x_i, y_i) = \frac{d}{d + \rho} x_i^2 + y_i^2 \quad (5)$$

其中 ρ 是曲线 f 在点 O 的曲率半径, d 是点 v_i 到曲线 f 的最短距离。 x_i 和 y_i 是点 v_i 在局部 Frenet 标架系下的坐标。

给定数据点 $v_i, i = 1, 2, \dots, n$, 期望找到一组控制点 $p_i, i = 1, 2, \dots, m$, 使其确定的曲线 f 满足

$$\max_{i=1,2,\dots,n} d(f(t), v_i) \leq \delta \quad (6)$$

其中 δ 是容忍误差, $f(t)$ 是由控制点 p_i 确定的曲线方程, $d(f(t), v_i)$ 是数据点 v_i 到曲线 f 最近点的距离: $d(f(t), v_i) = \min |f(t) - v_i|$ 。最近点的参数 t_i 由方程 $(f(t_i) - P_i)^T \cdot f'(t_i) = 0$ 得到。该方程是关于 t_i 的隐式方程, 常用牛顿迭代法求解, 使用该方法最重要的是初始条件的选定, 这里采用累加弦长的方法确定参数 t_i 的初始值。

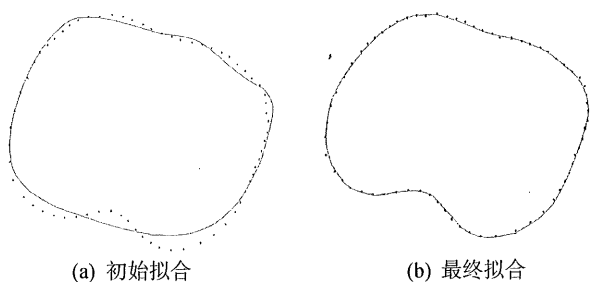


图2 曲线拟合

Fig. 2 Curve fitting

在不考虑数据本身误差的情况下, 曲线拟合的效果与控制点的位置、个数有关。本文所给出的初始条件生成的曲线比较理想, 可以加速曲线拟合过程, 但是对于比较复杂的曲线也难以满足要求。对于不满足要求的部分, 加入新的拟合点重新生成曲线。图2给出了曲线拟合效果, 图2(a)是初始拟合曲线, 图2(b)是对不满足误差要求的部分加入拟合点后的最终拟合效果。

5 结 论

本文给出的 B 样条曲线拟合方法具有以下优点: 首先, 采用等式约束下的最小二乘法求解 B

样条曲线的控制点。由于简化数据对曲线的形状起重要作用, 以简化数据作为硬约束条件; 期望生成的曲线拟合原始数据, 以原始数据作为软约束条件。通过建立等式约束下的最小二乘系统解决软约束的组合问题。该方法同传统的 Lagrange 乘子法相比, 计算量小。其次, 该方法可直接处理带约束的 B 样条曲线拟合问题, 如曲线相交问题, 曲线的交点可看作硬约束。虽然本文讨论的是曲线拟合, 但也可以扩展到曲面上。

参考文献:

- [1] PARK H, LEE J H. B-spline curve fitting based on adaptive curve refinement using dominant points [J]. Computer-Aided Design, 2007, 39(6): 439-451.
- [2] YANG H, WANG W, SUN J. Control point adjustment for B-spline curve approximation [J]. Computer-Aided Design, 2004, 36(7): 639-652.
- [3] PARK H. An error-bounded approximate method for representing planar curves in B-splines [J]. Computer Aided Geometric Design, 2004, 21(5): 479-497.
- [4] LAVOUE G, DUPONT F, BASKURT A. A new subdivision based approach for piecewise smooth approximation of 3D polygonal curves [J]. Pattern Recognition, 2005, 38(8): 1139-1151.
- [5] 任绍忠, 王国瑾. 曲线曲面拟合中型值点参数的最优化 [J]. 中国图象图形学报, 2006, 11(1): 96-102.
REN S, WANG G. Optimizing the parameters of data points in curve and surface fitting [J]. Journal of Image and Graphics, 2006, 11(1): 96-102.
- [6] 郭凤华. 参数曲线的最优参数化 [J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2007, 19(4): 464-467.
GUO F. Optimal parameterization of parametric curves [J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2007, 19(4): 464-467.
- [7] 何晖光, 田捷, 张晓鹏, 等. 网格模型简化综述 [J]. 软件学报, 2002, 13(12): 2215-2224.
HE H, TIAN J, ZHANG X, et al. A survey on mesh simplification [J]. Journal of Software, 2002, 13(12): 2215-2224.
- [8] FIELD D. A. Laplacian smoothing and delaunay triangulations [J]. Comm Appl Numer Meth, 1988, 4(6): 709-712.
- [9] TAUBIN G. A signal processing approach to fair surface design [C]. Proceeding of SIGGRAPH'95, LOS Angeles, CA, USA, 1995: 351-357.
- [10] MASUDA H, YOSHIOKA Y, FURUKAWA Y. Interactive mesh deformation using equality-constrained least squares [J]. Computers & Graphics, 2006, 30(6): 936-946.

- [11] WANG W, POTTMANN H, LIU Y. Fitting B-spline curves to point clouds by curvature based squared dis-

tance minimization [J]. ACM Transactions on Graphics, 2006, 25(2): 214–238.

B-spline Curve Fitting Using Equality-constrained Least Squares

WANG Dong¹, GAO Cheng-ying², LIANG Yun¹, GAO Yue-fang¹, ZHV Ton-lin¹

(1. College of Informatics, South China Agricultural University, Guangzhou 510642, China;

2. Computer Application Institute, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: The paper gives a method of B-spline curve fitting a series of ordered data. The ordered data are simplified with curvature as cost. The simplified data interpolate the curve, which is treated as hard constraint. The original data approximate the curve, which is treated as soft constraint. Then we build equality-constrained least squares equation. The positions of control points are calculated by solving the equation with QR decomposition. By calculating the distance between the ordered data and B-spline curve, the point of maximum error is inserted the simplified data if the error is beyond a pre-specified error tolerance. The method gives satisfying results regarding to approximation error, convergence speed and the number of control points. The method can also solve constrained curve fitting.

Key words: curve fitting; simplification; equality-constrained least squares

(上接第 14 页)

Singular Perturbation for the Robin Problem of Reaction Diffusion Equations with Two Parameters

CHEN Li-hua

(Department of Mathematics and Computer Science, Fuqing Branch of
Fujian Normal University, Fuqing, Fujian 350300, China)

Abstract: A class of singularly perturbed initial boundary value problem for the nonlinear reaction diffusion equations with two parameters is studied. Firstly, the expansion of outer solution for the problem is constructed using the regular perturbation method. Secondly, constituting the local coordinate system and using the stretched variable, the asymptotic expansion of first corrective term for boundary layer is constructed and the coefficients of the expansion are obtained successively. And then, inducing the two time stretched variable, the second corrective term for boundary layer is found. Basing on this, the formal asymptotic expansion of solution for the original problem is obtained. Finally, under suitable conditions, existence and its uniform validity of asymptotic expansion of solution for the initial boundary value problem are proved, by using theory of differential inequalities.

Key words: nonlinear; two parameters; singular perturbation